Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	Guztira

Azterketaren iraupena: Ordu bat eta erdi

OHARRA: Azterketako emaitza guztiak behar den bezala arrazoitu behar dira.

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Aurkitu analitiko eta grafikoki hurrengo funtzioaren definizio-eremua:

$$f(x,y)=\frac{\mathrm{L}\left[\left(36-x^2-9y^2\right)\cdot\left(x^2+y^2-4\right)\right]}{\sqrt{x^2-y}}$$

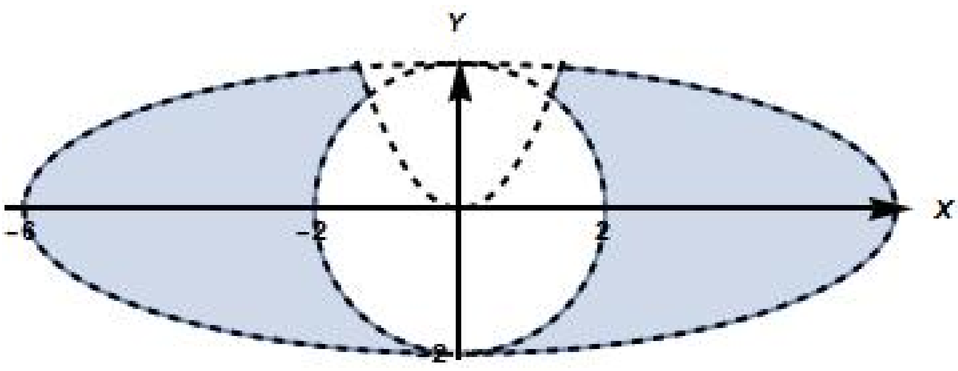
(1.5 puntu)

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, \left(36-x^2-9y^2\right)\cdot\left(x^2+y^2-4\right)>0\ ,\ x^2-y>0\right\}$$

- $\left(36-x^2-9y^2\right)\cdot\left(x^2+y^2-4\right)>0 \iff \begin{cases} 36-x^2-9y^2>0 \text{ eta } x^2+y^2-4>0 \\ \text{edo} \\ 36-x^2-9y^2<0 \text{ eta } x^2+y^2-4<0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x^2+9y^2<36 \text{ eta } x^2+y^2>4 \\ \text{edo} \\ x^2+9y^2>36 \text{ eta } x^2+y^2<4 \text{ , ezinezkoa da} \end{cases} \iff \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}<1 \text{ eta } x^2+y^2>4$$

- $x^2-y>0 \iff y<x^2$



2.- $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\left(x^2+y^2\right)\cdot \mathrm{L}(1+x\cdot y)}{\sin\left(x^2+y^2\right)} & \forall (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ **funtzioa emanik,**

a) Aztertu bere jarraitutasuna $(0,0)$ puntuan.

b) Kalkulatu $f'_x(0,0)$ eta $f'_y(0,0)$.

c) Estudiatu bere diferentziagarritasuna $(0,0)$ puntuan.

(2.5 puntu)

a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(x^2+y^2\right)\cdot \mathrm{L}(1+x\cdot y)}{\sin\left(x^2+y^2\right)}=\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(x^2+y^2\right)\cdot x\cdot y}{x^2+y^2}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\cdot y=0=f(0,0) \quad \Rightarrow \quad f \text{ jarraitua da (0,0) puntuan.}$$

b) $$f'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h^2\cdot \mathrm{L}(1)}{\sin\left(h^2\right)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{0}{\sin\left(h^2\right)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

Eta, simetriaz, $f'_y(0,0)=0$

c) Balndintza beharrezkoa eta nahikoa erabiliz:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\dfrac{\left(h^2+k^2\right)\cdot \mathrm{L}(1+h\cdot k)}{\sin\left(h^2+k^2\right)}}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left(h^2+k^2\right)\cdot h\cdot k}{\left(h^2+k^2\right)\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}}\overset{(*)}{=}\lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \forall\theta}}\frac{\rho^2\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta}{\rho}=\lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \forall\theta}}\rho\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta=0$$

Beraz, *f* diferentziagarria da (0,0) puntuan

(*) Polarretan adierazita: $\begin{cases} x=\rho\cdot\cos\theta \\ y=\rho\cdot\sin\theta \end{cases}$

3.- $F(x,y,z) = g(y \cdot z^2) + g(z) + x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2z + 2$ **funtzioa eta** $P(x,y,z) = (1,1,-2)$ **puntua emanik, non *g* eta bere deribatuak funtzio jarraituak diren,** $g(4) = 0$**,** $g(-2) = 0$**,** $g'(4) = 1$ **eta** $g'(-2) = 0$ **izanik,**

a) Estudiatu ea $F(x,y,z) = 0$ **ekuazioak** $z = z(x,y)$ **funtzio diferentziagarria definitzen duen *P* puntuaren ingurune batean.**

b) Baiezko kasuan, aurkitu $z = z(x,y)$ **funtzioaren lehenengo deribatu partzialak** $(1,1)$ **puntuan.**

(2 puntu)

a) Funtzio inplizituaren teorema betetzen den aztertuko dugu:

i. $F(P) = g(4) + g(-2) + 1 + 1 + 2 - 2 - 4 + 2 = 0$

ii. $\begin{cases} F'_x = 2x + 2 \\ F'_y = z^2 \cdot g'(y \cdot z^2) + 2y - 2 \\ F'_z = 2zy \cdot g'(y \cdot z^2) + g'(z) + 2 \end{cases}$ jarraituak dira *P* puntuaren ingurune batean

iii. $F'_z(P) = -4g'(4) + g'(-2) + 2 = -4 + 2 = -2 \neq 0$

Orduan, *P* puntuaren ingurune batean, $F(x,y,z) = 0$ ekuazioak $z = z(x,y)$ funtzio bakar bat definitzen du, non:

$F(x,y,z(x,y)) = 0$

z'_x eta z'_y jarraituak dira (beraz, $z = z(x,y)$ funtzio diferentziagarria da)

$z(1,1) = -2$

b) $z = z(x,y)$ funtzioaren lehenengo deribatu partzialak kalkulatzeko, $F(x,y,z(x,y)) = 0$ ekuazioan *x*-rekiko eta *y*-rekiko deribatuko odugu:

$$\begin{cases} F'_x + F'_z \cdot z'_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_z} \quad \Rightarrow \quad z'_x(-1,1) = -\dfrac{F'_x(P)}{F'_z(P)} = -\dfrac{4}{-2} = 2 \\ F'_y + F'_z \cdot z'_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z'_y = -\dfrac{F'_y}{F'_z} \quad \Rightarrow \quad z'_y(-1,1) = -\dfrac{F'_y(P)}{F'_z(P)} = -\dfrac{4}{-2} = 2 \end{cases}$$

4.- Oztopo ugari dituen itxura angeluzuzeneko klase batean, Wi-Fi errepikagailua leku jakin batean kokatuta dago, eta gelako puntu bakoitzean ematen duen estaldura honako funtzio honek adierazten du:

$$f(x,y) = e^{\sin(x-1)} + e^{\sin(2-y)} + x^2 \cdot y$$

a) **Ikasle bat $P(1,2)$ puntuan badago, norantz mugitu beharko du estaldura ahalik eta arinen handitzeko? Zer gertatuko da OY ardatzarekiko paraleloa den norabidean mugitzen bada?**

b) **$Q(2,1)$ punturantz mugitzen bada, estaldurak gora edo behera egingo du?**

(1.5 puntu)

a) Estaldura ahalik eta arinen handitzeko, *f* funtzioaren hazkunderik azkarrena adierazten duen norabidean mugitu beharko du, funtzioaren gradientearen norabidean, alegia:

$$\vec{\nabla} f(1,2) = \left(f'_x(1,2), f'_y(1,2) \right)$$

$$f'_x(x,y) = \cos(x-1) \cdot e^{\sin(x-1)} + 2xy \quad \Rightarrow \quad f'_x(1,2) = 5$$

$$f'_y(x,y) = -\cos(2-y) \cdot e^{\sin(2-y)} + x^2 \quad \Rightarrow \quad f'_y(1,2) = 0$$

Beraz, $\vec{\nabla} f(1,2) = (4,0)$ bektoreak adierazitako norabiedan mugitu beharko du.

Aurreko norabidea OX ardatzarekiko paraleloa da, eta, beraz, OY ardatzarekiko perpendikularra. Orduan, OY ardatzaren norabidean mugitzen bada, estaldura ez da aldatzen, gradientearekiko perpendikularra den norabidean, funtzioaren deribatu direkzionala 0 baita (gainera, OY ardatzaren norabidean izaten den estalduraren aldakuntza *y* aldagaiarekiko deribatuak ematen du, eta, ikusi dugunez, $f'_y(1,2) = 0$).

b) Kasu honetan, funtzioaren deribatu direkzionala kalkulatu behar dugu $\overrightarrow{PQ} = (1,-1)$ bektoreak adierazitako norabidean. Unitario bihurtuz, $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$:

$$\left. \frac{df}{d\vec{u}} \right|_{(1,2)} = \vec{\nabla} f(1,2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{5}{\sqrt{2}} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{estaldurak gora egingo du.}$$

5.- $f\left(x,y,z\right)=x^2+y^2+x\cdot y+a\cdot z$ **funtzioa emanik, non** $a\in\mathbb{R}$ **,**

a) **Aurkitu *a* parametroaren balioa,** $P\left(1,1,1\right)$ **puntua *f* funtzioaren puntu kritikoa izan dadin** $x^2+y^2+z^2=3$ **esferan.**

b) **Aurreko atalean lortutako *a* parametroaren baliorako, aztertu ea** $P\left(1,1,1\right)$ **puntua *f* funtzioaren mutur erlatiboa den** $x^2+y^2+z^2=3$ **esferan, zein motatako den adieraziz.** **(2.5 puntu)**

a) $P\left(1,1,1\right)$ puntua *f* funtzioaren puntu kritikoa da $x^2+y^2+z^2=3$ esferan, baldin eta puntu kritiko baldintzatua bada, eta, beraz, Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiliz, hurrengo funtzioaren puntu kritikoa daba:

$$w\left(x,y,z\right)=x^2+y^2+x\cdot y+a\cdot z+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-3\right)$$

$$\begin{cases} w'_x=2x+y+2\lambda x=0 \quad\Rightarrow\quad w'_x(P)=2+1+2\lambda=3+2\lambda=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda=-\dfrac{3}{2} \\ w'_y=2y+x+2\lambda y=0 \quad\Rightarrow\quad w'_y(P)=2+1+2\lambda=3+2\lambda=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda=-\dfrac{3}{2} \\ w'_z=a+2\lambda z=0 \quad\Rightarrow\quad w'_z(P)=a+2\lambda=0 \quad\Leftrightarrow\quad a=-2\lambda=3 \\ x^2+y^2+z^2=3 \end{cases}$$

Beraz, $a=3$.

b) Puntu kritikoa izateaz gain, mutur erlatiboa izateko, sailkatu behar dugu, d^2w-ren zeinua aztertuz.

$$\left.\begin{array}{l} w''_{x^2}=2+2\lambda \quad\Rightarrow\quad w''_{x^2}(P)=-1 \\ w''_{y^2}=2+2\lambda \quad\Rightarrow\quad w''_{y^2}(P)=-1 \\ w''_{z^2}=2\lambda \quad\Rightarrow\quad w''_{z^2}(P)=-3 \\ w''_{xy}=1 \\ w''_{xz}=0=w''_{yz} \end{array}\right\}\Rightarrow d^2w(P)=-(dx)^2-(dy)^2-3(dz)^2+2dxdy$$

Bestalde, $x^2+y^2+z^2=3$ baldintza bete behar denez, horren diferentziala kalkulatuz:

$$2xdx+2ydy+2zdz=0 \quad\Leftrightarrow\quad dz=-dx-dy$$

Eta, aurreko adierazpenean ordezkatuz:

$$\begin{aligned} d^2w(P)&=-(dx)^2-(dy)^2-3(-dx-dy)^2+2dxdy= \\ &=-(dx)^2-(dy)^2-3(dx)^2-3(dy)^2-6dxdy+2dxdy=-4(dx)^2-4(dy)^2-4dxdy= \\ &=-4\left((dx)^2+(dy)^2+dxdy\right)=-4\left(\left(dx+\frac{dy}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(dy)^2\right)<0 \end{aligned}$$

Beraz, *P* máximo erlatibo baldintzatua da.

Edo, <u>Sylvester-en irizpidea</u> erabiliz:

$$Hw(P)=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ -2 & -4\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\Delta_1=-4<0\\ \Delta_2=12>0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad d^2w(P)<0$$